Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Схема заполнения

Для билета

Вариант задания 2

Лист работы 1 из 2

6 4

ОДЗ:
$x \neq 4$

$$\left| \frac{x^3 + (x-2)^2 - (x^2-2)x - 12}{\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}} - x} \right| = a^2 + 2.$$

$$\left| \frac{x^3 + x^2 - 4x + 4 - x^3 + 2x - 12}{\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - x} \right| = a^2 + 2$$

$$\left| \frac{x^2 - 2x - 8}{4 - x} \right| = a^2 + 2.$$

$$\left| \frac{(x-4)(x+2)}{-(x-4)} \right| = a^2 + 2.$$

$$|-(x+2)| = a^2 + 2.$$

$$|-x-2| = a^2 + 2.$$

1) $-x - 2 = a^2 + 2.$

$-x = a^2 + 4$

$x = -a^2 - 4.$

$-a^2 - 4 \geqslant 0$

$-a^2 \geqslant 4$

$a^2 \leqslant -4.$

$a \in \varnothing$, т.к. $a^2 \geqslant 0.$

2) $-x - 2 = -a^2 - 2.$

$-x = -a^2$

$x = a^2$

$a^2 \geqslant 0. \Rightarrow$ Ответ: $x_1 \geqslant 0$ при $a \in (-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$,
$a \in R$ то всегда будет $x_2 \leqslant 0.$

Можно использовать оборот листа для записи решений

№2

$(y-1)(4x+3) = 3x^2 - x - 14$

$4xy - 4x + 3y - 3 = 3x^2 - x - 14$

$4y(x+2) = 3x^2 + 3x - 6$

$y = \frac{3x^2+3x-6}{4(x+2)} = \frac{3(x^2+x-2)}{4(x+2)} = \frac{3(x+2)(x-1)}{4(x+2)} = \frac{3(x-1)}{4}$

$x - 1 \vdots 4$

Ответ: $x \in \{a \mid a = 4m+1;\ m \in \mathbb{Z}\}$; $y = \frac{3(x-1)}{4}$.

№1

Дано:

$t_{M+K} = 10$ мин
$t_{A+K} = 15$ мин
$t_{M+A} = 18$ мин

Найти:

$t_{2об} - ?$

Решение:

$t_{M+K} = \frac{S}{V_M + V_K} = 10$ мин $\Rightarrow V_M + V_K = \frac{S}{10} = \frac{9S}{90}$

$t_{A+K} = \frac{S}{V_A + V_K} = 15$ мин $\Rightarrow V_A + V_K = \frac{S}{15} = \frac{6S}{90}$

$t_{M+A} = \frac{S}{V_M + V_A} = 18$ мин. $\Rightarrow V_M + V_A = \frac{S}{18} = \frac{5S}{90}$

Сложим все уравнения:

$2(V_A + V_K + V_M) = \frac{20S}{90} \quad /:2$

$V_A + V_K + V_M = \frac{S}{9}$

$V_A + V_K + V_M = \frac{2S}{18} \Rightarrow t_{2об} = 18$ мин.

Ответ: $t_{2об} = 18$ мин.

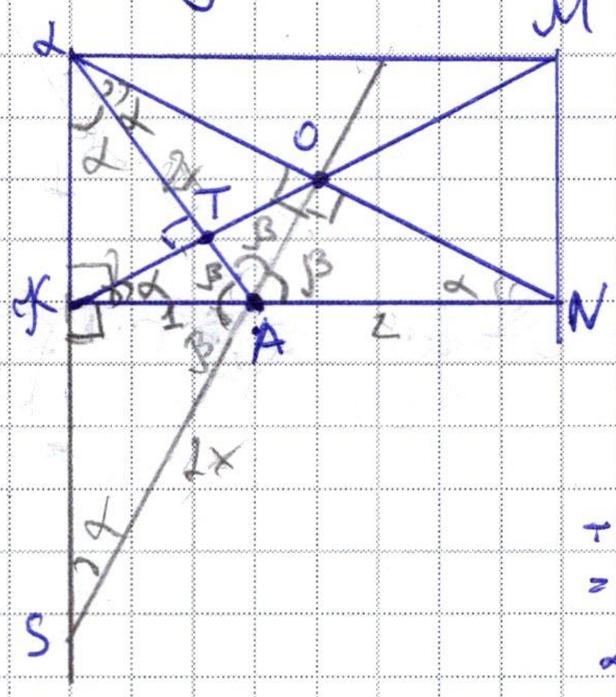
№5

Дано:
$KM\alpha N$ – прямоугол.
$\alpha A \perp KM$
$\alpha A = AN$

Найти:
а) $\frac{KA}{AN} - ?$

б) $\frac{S_\alpha}{\alpha A} - ?$

Рисунок:



Решение:

а) ① Рассмотрим $\triangle A\alpha N$: $\alpha A = AN$ – по условию $\Rightarrow$ $\triangle A\alpha N$ – равнобедренный $\Rightarrow \angle A\alpha N = \angle ANA = \alpha$.
AO – делит αN на $\alpha O = ON$, т.к. в прямоугольнике диагонали точкой пересечения делятся пополам $\Rightarrow$ AO также и высота: $\angle AON = \angle AO\alpha = 90°$.
и AO также биссектриса $\Rightarrow \angle \alpha AO = \angle OAN = \beta$.
② Рассмотрим $\triangle KON$: он равнобедренный, т.к. $KO = ON$ (по свойству прямоуг.) $\Rightarrow \angle ONA = \angle OKA = \alpha$. В $\triangle KTA$: $\angle KTA = \alpha$
$\angle KTA = 90° \Rightarrow \angle TKA = 180° - \alpha - 90° = 90° - \alpha = \beta$
③ Рассмотрим $\angle KAN = 180° = 3\beta \Rightarrow \beta = 60°$. ④ Рассмотрим $\triangle KAO$: он равнобедренный, т.к. AT биссектриса и высота ($\angle KAT = \angle TAO$; $AT \perp KM$) $\Rightarrow OA = KA$. Из п. 3 мы знаем, что $\angle KAT = 60° \Rightarrow \angle TKA = 30° \Rightarrow \triangle KTA$ – прямоугольный, в котором катет, лежащий напротив угла в 30° равен половине гипотенузы. Пусть $KA = x$.

olymp.bmstu.ru

Продолжение №5.

KA - гипотенуза. Пусть $TA = x$, тогда $KA = 2x$.

③ Рассмотрим $\triangle AON$: он прямоугольный и $\angle ONA = 30^\circ \Rightarrow$

$OA = 0{,}5\,AN$

$OA = KA = 2x \Rightarrow AN = 4x$.

Найдём отношение: $\frac{KA}{AN} = \frac{4x}{2x} = \frac{2}{1}$

б) ① Рассмотрим $\triangle SAA$:

$\angle AAS = 2\beta = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$ ($\angle KAS = \beta$, т.к. он вертикален $\angle OAN = \beta$).

Так как в $\triangle SKA$: $\angle SKA = 90^\circ$; $\angle SAK = 60^\circ \Rightarrow \angle KSA = 30^\circ$.

В $\triangle SAA$: $\angle SAA = 120^\circ$; $\angle KSA = 30^\circ \Rightarrow \angle SAA = 30^\circ \Rightarrow \triangle SAA$ - равнобедренный, т.к. $\angle ASA = \angle AAS$.

② Пусть $KA = x$, тогда $AA = 2KA = 2x$, т.к. $\triangle KAA$ - прямоугольный; KA - лежит против угла в 30° и AA - гипотенуза.

По теореме Пифагора: Найдём KA:

$AA^2 = KA^2 + AK^2$

$AK^2 = AA^2 - KA^2 = 4x^2 - x^2 = 3x^2$

$AK = \sqrt{3}x$.

$AS = 2AK$ (т.к. AK - медиана (высота) в $\triangle SAA$) $\Rightarrow AS = 2\sqrt{3}x$.

$\frac{SA}{AA} = \frac{2\sqrt{3}x}{2x} = \frac{\sqrt{3}}{1}$

Ответ: $\frac{2}{1}$; $\frac{\sqrt{3}}{1}$.